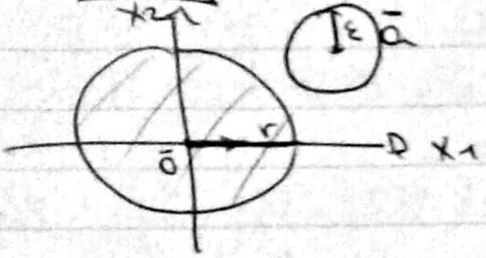
30/10/18

Παραδείγματα: ① $U = B(\bar{0}, r) \cup \{\bar{a}\}$, όπου $\|\bar{a}\| > r$

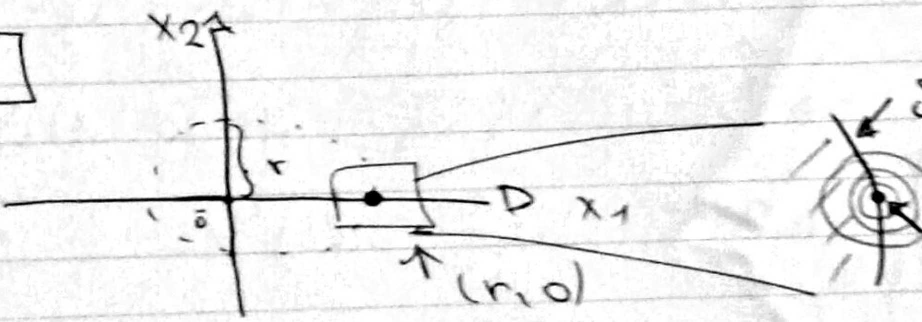
$\boxed{n=2}$



$\bar{a}$: μεμονωμένο σημείο του U

② $V = B(\bar{0}, r) \cup \{(r, 0, \dots, 0)\}$

$\boxed{n=2}$



δεν ανήκουν στο V

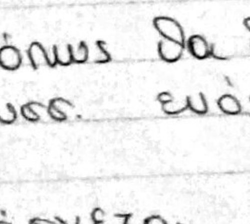
είναι σημείο συσσώρευσης του V, αφού:

$V \cap B((r,0), \varepsilon) \setminus \{(r,0)\} \neq \emptyset, \ \forall \varepsilon > 0$

[όπως θα δούμε] ένα στοιχείο $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο συσσ. ενός συνόλου $V \subset \mathbb{R}^n$

[άσχετα από το αν $\bar{a} \in V$ ή $\bar{a} \notin V$] αν υπάρχει ακολουθία σημείων που όλα βρίσκονται στο V και συγκλίνουν στο $\bar{a}$,

$\Leftrightarrow$ η απόσταση των όρων της ακολουθίας από το $\bar{a}$ τείνει στο 0



Αποδείξεις (από χτες):

(γ) $\text{int}\,U \subset U'$ [⇔ κάθε εσωτ. σημείο του U είναι σ.σ του U]

[$\bar{x} \in \text{int}\,U \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon_0) \subset U$

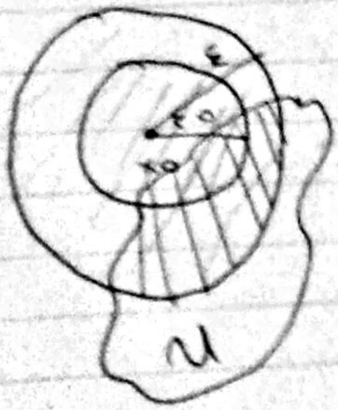
$\Rightarrow \quad B(\bar{x}, \varepsilon_0) \setminus \{\bar{x}\} \subset U$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ με $\varepsilon \leq \varepsilon_0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \subset U$

— " — — $: B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U = B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

Επίσης $\forall \varepsilon > \varepsilon_0 : B(\bar{x}, \varepsilon_0) \setminus \{\bar{x}\} \subset B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow$

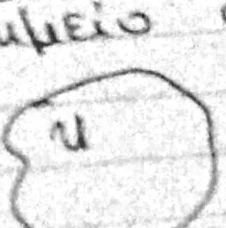
$\Rightarrow \overbrace{B(\bar{x}, \varepsilon_0) \setminus \{\bar{x}\} \cap U}^{\neq \emptyset} \subset B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U$



$\Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U \neq \emptyset$

(δ) $\text{ext}\,U \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$ [δηλ. κανένα εξωτερικό σημείο δεν είναι σ.σ.]

⊙ ένα εξωτ. σημείο)



$\text{ext}\,U = \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus U)$

[$\bar{x} \in \text{ext}\,U \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\} = \emptyset \Rightarrow$

$B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset$

$\Rightarrow \bar{x}$ όχι σ.σ.

Πρόταση: $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ τότε: $\boxed{\bar{\mathcal{U}} \underset{\supset}{\subseteq} \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'}$

Απόδειξη: ($\supset$:) Αφού πάντα $\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$ πρέπει και αρκεί νδο: $\underbrace{\mathcal{U}' \subset \bar{\mathcal{U}}}$

$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}'$

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{U}} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{U}} \subset$
$\subset \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$

$\Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{U} = \emptyset \Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{U} \setminus \{\bar{x}\} = \emptyset \Rightarrow \bar{x}$ δεν είναι σ.σ.

$\Leftrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}'$

($\subset$): Θνδο: $\underbrace{\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{U} \cup \mathcal{U}')} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{U}}$

$= (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}')$

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$ το οποίο δεν είναι σ.σ. του $\mathcal{U}$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \underbrace{B(\bar{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{U} \setminus \{\bar{x}\}} = \emptyset$

$= B(\bar{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$ (!) $\Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{U}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{U}}$ II

ΠΟΡΙΣΜΑ: $\mathcal{U}$ κλειστό $\Leftrightarrow \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$

$$\boxed{\bar{\mathcal{U}} = \mathring{\mathcal{U}} \cup \partial \mathcal{U}}$$

Άσκηση 1.3.1